

Дәріс №8. Дәрежелік қатар. Тейлор қатары. Фурьенің тригонометриялық қатары.

Енді мүшелері функциялар болатын қатарларды қарастырамыз.

Анықтама .

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

түріндегі қатарды дәрежелік қатар деп атайды. Бұл дәрежелік қатардың жалпылама түрі.

Біз мынадай түрдегі дәрежелік қатарды қарастырамыз:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2)$$

себебі $x-a=t$ десек (1) қатары (2) түріне келеді.

x -тің белгіленген мәнінде (2) қатар сан қатарына айналады. (2) қатар сан қатар жинақты болатын x -тың барлық мәндері қатардың жинақтылық облысын құрады. Егер дәрежелік қатар жинақты болса оның қосындысы жинақтылық облысында анықталған функция болады

Теорема. Егер (2) дәрежелік қатары жинақты болса оның жинақтылық облысы $(-R, R)$ түріндегі болады.

$(-R, R)$ - интервалы (2) дәрежелік қатарының жинақтылық интервалы, ал R саны жинақтылық радиусы деп аталады. Дәрежелік қатар жинақтылық интервалының ішінде абсолютты жинақты болады.

Даламбер белгісін

$$|a_0| + |a_1| |x| + |a_2| |x|^2 + \dots + |a_n| |x|^n + \dots \quad (3)$$

қатарына қолданып жинақтылық радиусын табатын формула аламыз:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (4)$$

(2) дәрежелік қатары интервалында жинақты болсын. Оның қосындысын $f(x)$ деп белгілейік. Сонда осы функцияның дифференциалданатындығын, интегралданатындығын дәлелдеуге болады, сонымен бірге:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad \text{болса}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

$$\int f(x)dx = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \dots$$

орындалады, яғни дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға, интегралдауға болады.

Мына қатарды

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (5)$$

$f(x)$ функциясының $(x-a)$ дәрежесі бойынша жазылған Тейлор қатары деп атайды. Ал мына қатарды

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (6)$$

$f(x)$ функциясының x дәрежесі бойынша жазылған Тейлор қатары деп атайды.

(5) және (6) қатарларының қосындылары жинақтылық интервалының ішінде $f(x)$ функциясын береді. Яғни $\forall x \in (-R, R)$ үшін

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (7)$$

орындалады. Бұл формула $f(x)$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуі деп аталады.

Кейбір элементар функцияларының Тейлор қатарына жіктелуін келтірейік:

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$2) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{m+1} x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \dots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \dots \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$4) (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(m-1)]}{n!}x^n + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1).$$

Элементар функцияларының Тейлор қатарына жіктелуін функция мәндерін немесе өрнектерді жуықтап есептеуде қолданады.

Мысалы $\sqrt[3]{9}$ түбірін есептеу керек дейік. Бұл өрнекті мына түрде жазайық:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\left(1 + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Енді 4) формуласында $m = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{8}$ деп алсақ

$$\sqrt[3]{9} = 2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots \right] =$$

$$2 \left(1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41472} - \dots \right) \approx 2,0802$$

$f(x)$ функциясы $(-1, 1)$ интервалында анықталған үзіліссіз дейік , ал интервалдың шеткі нүктелерінде тежеулі біржақты шектері бар болсын.

Анықтама. Мына қатарды :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$f(x)$ функциясының тригонометриялық Фурье қатары деп атайды, мұндағы a_n және b_n дегендер Фурье коэффициенттері. Олар былай анықталады:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} f(x) dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} f(x) dx .$$